

Aufgabe 2.1 Berechnen Sie die Summe

a) $\sum_{k=-4}^4 k^3, \quad \sum_{k=3}^7 (2k+4), \quad \sum_{j=-1}^1 (j^2-1),$

b) der ungeraden Zahlen zwischen 1000 und 2000,

c) der positiven ganzen Zahlen von je maximal 3 Ziffern, die auf 2 oder 7 enden.

d) $\sum_{k=0}^{14} (5k+3), \quad \sum_{k=-2}^{22} (100k+10).$

Aufgabe 2.2 Berechnen Sie die Summe

a) $2 + 6 + 18 + 54 + \dots + 1458,$

d) $1 - \frac{9}{10} + \frac{81}{100} - \frac{729}{1000} + \dots,$

b) $\frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \dots + \frac{64}{729},$

c) $\frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \dots + \frac{3}{10\,000\,000},$

e) $7 + \frac{7}{10} + \frac{7}{100} + \dots$

Aufgabe 2.3 Finden Sie den unkürzbaren Bruch für die periodische Zahl:
 $0,\overline{2}; \quad 10,\overline{9}; \quad 0,\overline{123}; \quad 0,\overline{10}; \quad 3,\overline{091}.$

Aufgabe 2.4 Berechnen Sie $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ für:

a) $a_n = \frac{2n}{n+12},$

d) $a_n = \frac{4n^2 + 5n + n\sqrt{n}}{3n^2 - 2n - 1},$

b) $a_n = \frac{2n + \sqrt{n}}{n - \sqrt{n}},$

e) $a_n = \frac{n^2 + 1}{n\sqrt{n^2 + 1}}.$

c) $a_n = \frac{n + \frac{1}{n}}{n - \frac{2}{n}},$

Aufgabe 2.5 Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n - 2^{-n}}{2^n - 1},$

e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 - 3^n}{n^3 + 3^n},$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1} + 1}{2^n + 1},$

f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2}{n + 2^{-n}},$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{3n} - 1}{2^{3n} - 3^{2n}},$

g) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + n!}{3^n - n!},$

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 + 3n - 7) \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1},$

h) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! + 3n^9 - 7}{n^n + 3n^9 + 7}.$

Aufgabe# 2.6 Finden Sie A , B und C , für die gilt:

a) $\frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1},$

b) $\frac{3x^2 - 4x - 5}{(x-1)(x+2)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x-3}.$

Aufgabe# 2.7 Berechnen Sie die folgenden Summen:

a) $1 + 11 + 111 + \dots + \underbrace{111\dots 1}_{n \text{ Einsen}},$

b) $\frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} \dots + \frac{2n-1}{2^n}.$

Aufgabe# 2.8 Berechnen Sie die doppelte Summe $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}$, falls

a) $a_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{falls } i \neq j, \\ 1, & \text{falls } i = j; \end{cases}$ b) $a_{ij} = i$, c) $a_{ij} = i - j$, d) $a_{ij} = |i - j|.$

Aufgabe# 2.9 Es bezeichne S_n die Summe der ersten n Glieder einer arithmetischen Folge. Beweisen Sie:

a) $S_{n+3} = 3S_{n+2} - 3S_{n+1} + S_n,$

b) $S_{3n} = 3(S_{2n} - S_n).$

Aufgabe# 2.10 Es bezeichne S_n die Summe der ersten n Glieder einer geometrischen Folge. Beweisen Sie:

$$S_n(S_{3n} - S_{2n}) = (S_{2n} - S_n)^2.$$

Aufgabe# 2.11 Beweisen Sie: Für jede Zahl a und jede natürliche Zahl n gilt

$$(1 + a + a^2 + \dots + a^{n-1})(1 + a + a^2 + \dots + a^{n+1}) = (1 + a + a^2 + \dots + a^n)^2 - a^n.$$

Aufgabe# 2.12 Beweisen Sie: Für beliebige Zahlen a, b gilt

a) $a^{n+1} - b^{n+1} = (a - b) \sum_{k=0}^n b^k a^{n-k},$

b) $a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a+b) \sum_{k=0}^n (-1)^k b^k a^{2n-k}.$